E. S. C. C.

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE COMPIÈGNE

Établissement d'enseignement supérieur technique privé

6, Avenue Thiers - 60200 Compiègne - Tél. 44 40 29 32

CONCOURS D'ADMISSION 1986

MATHEMATIQUES I

Mercredi 23 Avril 1986 de 8H00 à 12H00

Option :
Economique

Coefficient :
3

PROBLEME I

Le plan est rapporté au repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
Unités : $|\vec{i}| = 1$ cm , $|\vec{j}| = 2$ cm

PARTIE 1.

Soient les fonctions numériques à valeurs réelles g et h définies par :

$g(x) = h(x) - \ln|x + 1|$ $\qquad$ $h(x) = \frac{4x^2 + x - 1}{2(x + 1)}$

ln désigne la fonction logarithme népérien.

1°. Montrer que h(x) peut s'écrire sous la forme :

$h(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ où a, b, et c sont trois réels que l'on déterminera.

2°. Etudier les branches infinies de g.

3°. Calculer les limites de g(x) quand x tend vers -1.

4°. Etudier les variations de g.

5°. Etudier la concavité de g.

6°. Construire le graphe de g sur $]-1,+\infty[$.

7°. Calculer $g\left(\frac{x-1}{2}\right)$.

8°. Montrer qu'il n'existe que deux réels x_1 et x_2 , $(x_1 < x_2)$, vérifiant l'équation $g(x) = 0$. Donner les valeurs approchées de x_1 et x_2 à 0,01 près par défaut.

9°. En déduire le signe de g(x) selon les valeurs du réel x.

10°. Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe représentative de g, l'axe x'x et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

PARTIE 2.

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{7}\left[4x^3 - 6x^2 + 3 - 6(x+1)^2 . \ln\left|\frac{x+1}{2}\right|\right] \qquad \text{si } x \neq -1$$

et $f(-1) = -1$

1°. Etudier la continuité de f en -1.

2°. Etudier la dérivabilité de f en -1.

3°. Etudier les branches infinies de f.

4°. Montrer que : $f'(x) = \frac{12(x+1)}{7} . g\left(\frac{x-1}{2}\right)$

où g est la fonction étudiée dans la partie 1.

5°. En déduire le signe de f'(x) et donner les variations de f.

6°. Construire le graphe de f.

École Supérieure de Commerce de Compiègne
Option économique. Math I
1986
page 273

PROBLEME II

Dans ce problème, on note :

* $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, I la matrice unité et 0 la matrice nulle.

* pour $m \in \mathcal{M}$ $\quad m^0 = I$

$m^2 = m.m$

et pour $k \in \mathbb{N}^*$ $\quad m^k = m^{k-1}.m$

* P_n est le polynôme défini par : $\quad P_n(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k.u^k$

$n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$ et $a_k \in \mathbb{R}$

• θ le polynôme nul.

On considère :

• les matrices a et b de $\mathcal{M}$ vérifiant les conditions :
$a \neq 0$, $b \neq 0$, $ab = ba = 0$, $a^2 = a$ et $b^2 = b$.

• E l'ensemble des matrices m(x,y) de $\mathcal{M}$ telles que :
$m(x,y) = xa + yb$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

PARTIE 1.

1°. Montrer que E est un espace vectoriel.

2°. Montrer que (a,b) est un système libre et en déduire la dimension de E.

3°. La matrice unité I est-elle élément de E ?

4°. Montrer que E est stable pour le produit matriciel.

5°. Résoudre et discuter l'équation : $m(x,y) \cdot m(x',y') = I$
où x et y sont donnés , x' et y' les inconnues. Conclusion.

6°. Calculer pour $k \in \mathbb{N}$: $(m(x,y))^k$

PARTIE 2.

1°. Pour $a_k = 1$ $\quad k \in \{0,\ldots n\}$, écrire :

i) $P_n(a)$ et $P_n(b)$ en fonction de a, b et n.

ii) $P_n(m(x,y))$ en fonction de a, b, n, x et y.

2°. Pour $a_n = 1$ et $a_k \in \mathbb{R}$ $\quad k \in \{0,\ldots,n-1\}$:

i) Etudier le cas $P_1(a) = 0$

ii) Déterminer le polynôme P_2 tel que $P_2(a) = 0$

iii) Pour $n > 2$, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que : $P_n(a) = 0$ est que : $P_n(u) = P_2(u).Q(u)$
où Q est un polynôme de degré n-2.

PARTIE 3.

$$a = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad m = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1°. Calculer : a^2 , b^2 , ab , ba et m^2.

2°. Déterminer x et y tels que : $m = xa + yb$.

3°. Calculer m^k où $k \in \mathbb{Z}$

4°. Déterminer les valeurs propres de a.

5°. Montrer que b et m admettent les mêmes vecteurs propres.